

Hoe leren kinderen rekenen?

Gert Schoeman
Belinda Terlouw

Het rekenonderwijs staat op dit moment volop in de belangstelling. Veel scholen bezinnen zich op de vraag hoe ze de kwaliteit van hun rekenonderwijs kunnen verbeteren. Vragen die scholen zichzelf stellen zijn: Hoe leren kinderen eigenlijk rekenen?

Hoe willen wij kinderen leren rekenen?

Reden voor de sectie rekenen van de Katholieke Pabo om haar visie met betrekking tot deze vragen in beknopte vorm weer te geven.

De vraag hoe je leert is natuurlijk niet alleen voorbehouden aan het vak rekenen of aan de school alleen. Leerlingen gaven de volgende antwoorden op de vraag wanneer ze iets geleerd hebben en wat het met ze deed: "Ik moest topo leren. Ik vond er niets aan maar ik ken het wel!"

"Tijdens de keeperstraining heb ik een nieuwe techniek geleerd. Ik houd nu meer ballen tegen. Dat geeft een geweldig gevoel!"

Leren kan vanuit een intrinsieke en een extrinsieke motivatie tot stand komen.

Hoe leren kinderen rekenen?

Heb je in de rekenles een lerend kind gezien? Wat zag je dan? Hebben ze iets geleerd of lieten ze alleen zien dat ze het konden of dat ze het niet konden? Deze vragen dient de leerkracht zich voortdurend te stellen. Als een leerkracht zich deze vragen voor het eerst stelt dan blijkt het vaak nog niet eenvoudig te zijn hier een antwoord op te geven. Het vraagt een diagnostisch oog. Wat doet het kind? Hoe denkt het kind? Hoe interpreteer ik dit? Daar komt ook nog bij dat je als leerkracht ook een situatie moet creëren waarin het kind zich kan laten zien. Interactie, kladpapier, materialen, de juiste vraag en de juiste impuls op het juiste moment... Belangrijk is dan ook te onderzoeken wat de rol van de leerkracht is.

In groep 5 ging het aanleren van de tafels erg moeizaam. Leerlingen raakten gefrustreerd omdat ze dachten dat het ze konden leren. In één ochtend hebben we ze duidelijk gemaakt wat een keersom was door ze in groepjes in de supermarkt keersommen te laten fotograferen. Dit was een doorbraak voor het leerproces van de leerlingen of zoals een leerling het zo treffend verwoordde:

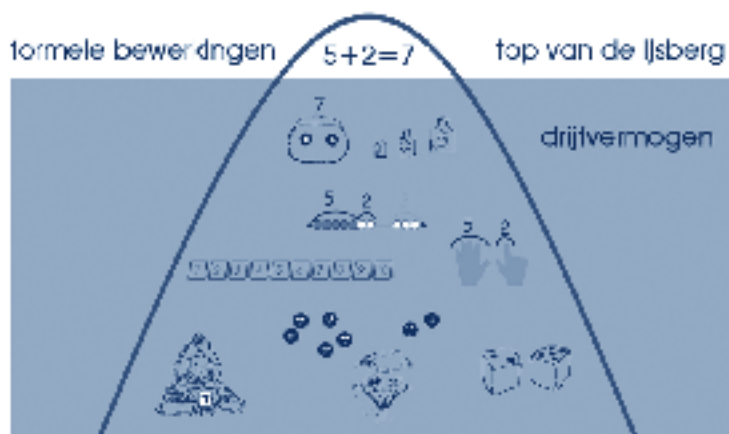
"Juf, had jij gedacht dat ik die keersommen ooit nog zou leren?"

De rekenmethoden zijn allemaal min of meer concentrisch opgesteld. Verschillende domeinen komen iedere keer weer terug op een iets hoger niveau. Voordeel is dat de samenhang tussen de domeinen beter tot stand komt zodat de verschillende leerlijnen goed vervlochten raken. Nadeel is dat iedere les de leerlingen met twee en soms wel drie verschillende domeinen bezig zijn waardoor ze zich niet echt kunnen verbinden met de leerstof. Maarten Dolk (2005) geeft aan dat het af en toe ook zinvol kan zijn de methode ter zijde te schuiven en een wat groter reken-wiskundig probleem aan de orde te stellen. Dat kan kinderen uitdagen tot het construeren van eigen oplossingen en discussies. Op deze manier kan er gewerkt worden aan één kerninzicht in het rekenonderwijs. Een voorbeeld van een kerninzicht is het doorzien van de inverse bewerking van een erafsom waardoor deze met een erbijsom kan worden opgelost. Terlouw en Schoeman (2006) lieten zien hoe je leerlingen in één ochtend kunt leren wat een keersom in essentie inhoudt en hoe belangrijk dit kerninzicht is voor het aanleren van de tafels. Maar ook de begripvorming bij breuken is een kerninzicht.

Rekenmethoden staan maar kort stil bij de begripvorming bij de verschillende domeinen. Kinderen moeten snel, sommige kinderen te snel, op formeel niveau kunnen rekenen.

Het topje van de ijsberg

Hoe ziet de opbouw van een leerlijn er uit? Boswinkel en Moerlands (2002) gebruiken een metafoor om dit duidelijk te maken. Het topje van de ijsberg is zichtbaar doordat er een enorme massa ijs onder de waterspiegel zit, het drijfvermogen genoemd. Het topje van de ijsberg representeert de formele bewerkingen ofwel de kale som. Leerlingen worden hier voornamelijk op getoetst. Maar

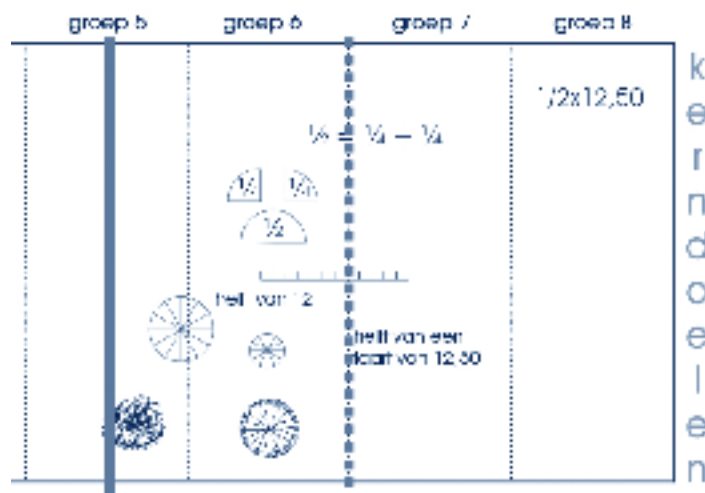


voordat een leerling de formele bewerkingen beheerst, is er al een heel proces achter de rug waarin de leerlingen de inhoud en betekenis hebben verkend van de getallen waarmee uiteindelijk gerekend gaat worden. Het drijfvermogen wordt gerepresenteerd door dit proces. Als er wordt gekeken naar de tijd die in het onderwijs wordt besteed aan de formele bewerkingen en het drijfvermogen dan wordt er vaak erg veel energie gestoken in het topje van de ijsberg, terwijl er relatief weinig energie in het drijfvermogen wordt gestoken.

De leerlijn heeft dus een horizontale en een verticale opbouw. In figuur 2 wordt hier een voorbeeld gegeven van een opbouw voor breuken. Horizontaal loopt de opbouw van de verkenningen van breuken naar de relatie tussen breuken en kommagetallen. Verticaal loopt de opbouw van concreet naar abstract. Hier zit een mooie mogelijkheid om te differentiëren. Het komt nogal eens voor dat leerlingen in groep 7 moeite hebben om te rekenen met breuken. Vaak omdat het ze aan drijfvermogen ontbreekt.

Het moet mogelijk zijn om een les aan te bieden waarop ieder kind op eigen niveau kan werken. De kinderen maken met losse stukken een A4-papier en bepalen van elk deel van de puzzel welk deel van het geheel het stuk is. Een van de kinderen past het kleinste stuk van de puzzel op het A4-tje af en telt hardop. Het stuk past er 32 keer in. Het is dus één van de 32 stukjes en dat is $1/32$ weet het kind. Een ander kind redeneert dat het kleinste stuk de helft is van een groter stuk dat op zijn beurt de helft van een nog groter stuk is, dat op zijn beurt de helft van $1/4$ is. Dus de helft van $1/4$ is $1/8$ en daar de helft van is $1/16$ en daar weer de helft van is $1/32$. Dit laatste kind rekent al formeel met breuken, terwijl het andere kind nog aan het ontdekken is dat een breuk een deel van een geheel is. En dan moet je ook nog weten dat het wel gelijke stukken moeten zijn, want anders zou je ten onrechte kunnen denken dat als de puzzel in 9 ongelijke stukken verdeeld is, ieder stuk $1/9$ deel is.

Een breukenles kan bestaan uit één les waarin sommige leerlingen met materialen aan de slag gaan ter bevordering van de begripsvorming en andere leerlingen met abstractere modellen, terwijl een derde groep leerlingen op formeel niveau wordt uitgedaagd. Dit noemen we lesgeven vanuit de bandbreedte.



...Leerlingen geven dan vaak aan dat als de leerkracht het uitlegt ze het wel snappen, maar als ze het zelf moeten doen, wil het niet lukken...

Wie doet het denkwerk?

Neem de laatste rekenles die u heeft gegeven in gedachten en vraag u zich af wie het denkwerk doet. Is het de leerling, de methode of de leerkracht? Hopelijk is het de leerling maar in de praktijk is het toch vaak de methode of de leerkracht die het denkwerk voor een groot deel overneemt. Voor de leerling is het dan vaak alleen nog zaak om de juiste stappen achter elkaar te zetten, maar het inzicht waarom deze stappen gezet dienen te worden ontbreekt. Leerlingen geven dan vaak aan dat als de leerkracht het uitlegt ze het wel snappen, maar als ze het zelf moeten doen, wil het niet lukken. Ze kunnen dan de transfer niet maken. Ook gebeurt het hierdoor wel eens dat wat de leerkracht voordoet, ten onrechte bij andere situaties ook wordt toegepast. Als ik $30 + 40$ doe, mag ik eerst de nullen weglaten en $3 + 4$ en dan de nul er weer aanplakken. Als kinderen dit voorgedaan krijgen, gebeurt het wel eens dat ze bij $140 : 70$ redeneren dat ze eerst $14 : 7$ mogen doen en dan de nul er weer aan vast mogen plakken. Het antwoord is volgens hen dan 20. Als je ze dan vraagt hoe vaak 70 in de 140 past, zien ze hun fout in.



Hoe krijg je het denkwerk bij de kinderen?

Past de wereldbevolking in de provincie Utrecht? Als je kinderen deze vraag stelt, kijken ze je vreemd aan. Het lijkt ze wat veel. We nodigen ze uit aan de slag te gaan. Ze zijn zo gewend dat jij als leerkracht alles aandraagt om het probleem op te lossen, dat ze aanvankelijk maar moeilijk in beweging te krijgen zijn. Als je aangeeft dat ze zelf op onderzoek uit moeten gaan, zelf moeten nadenken, zie je de verschillen. Sommigen zoeken op internet en gaan aan de slag met heel exacte gegevens. Anderen maken aannames, gebruiken mooie ronde getallen en gaan daarmee aan de slag. Weer andere kinderen passen een vierkante meter af en proberen uit hoeveel mensen er eigenlijk op een vierkante meter passen. Uiteindelijk presenteren ze hun bevindingen aan elkaar. Er is gewerkt met grote getallen, met het metriek stelsel, er is vermenigvuldigd, gedeeld, opgeteld en aftgetrokken. Er is veel geleerd met en van elkaar. Vanuit deze betrokkenheid en met behulp van de inzichten die ze opdeden kan een deel van de instructie van de hierop volgende les achterwege blijven. Past de wereldbevolking in de provincie Utrecht? Iets om met uw klas uit te zoeken...

Het antwoord op die vraag ligt voor een deel gelegen in de rijke instap. Iedere rekenles zou moeten beginnen met een rijke instap die de voorkennis activeert en het onderwerp actualiseert. In die rijke instap moet ruimte zijn voor niveauverschillen tussen leerlingen. Dat houdt in dat er een open vraagstelling moet zijn. Het lijkt moeilijk om voor iedere les een rijke instap te bedenken, maar als het concept helder is, gaat het de leerkracht steeds gemakkelijker af. Ook spel nodigt kinderen uit tot denken.

De kracht van het spel in de rekenles.

Kinderen, maar ook volwassenen, spelen graag spelletjes. Met als doel de ander te slim af te zijn en te winnen, wordt er een grote betrokkenheid gecreëerd. En als die spelletjes een beroep doen op de rekenvaardigheid van de leerlingen dan kan er een goede voedingsbodem ontstaan voor het leren rekenen. Voorwaarde is wel dat je als leerkracht weet wanneer je welk spel in moet zetten. Het ene kind moet zijn vermenigvuldigvaardigheden misschien nog meer ontwikkelen en het andere kind kan nog wel wat ervaring opdoen bij zijn ruimtelijk inzicht. Als jij weet wat een kind nodig heeft en welk doel een spel kan dienen, is dit een krachtig middel om je rekenonderwijs mee te verrijken. Ook kan het spel je helpen bij het gericht observeren van de vaardigheden van je kinderen.

Werken aan getalbegrip is heel belangrijk. Getalbegrip vormt de basis van het reken/wiskundeonderwijs. Iedere dag zou je hier even aandacht voor moeten hebben. Als leerkracht weet je vaak wel waar de "pijnpunten" zitten. Kinderen vinden het soms nog lastig de waarde van de verschillende cijfers in een getal te onderscheiden. In 555 zien we drie vijven, maar ze hebben alle drie een andere waarde. Als dat niet onderkend wordt, maken kinderen fouten in bijvoorbeeld de som $4099 + 1$. Sommige kinderen denken dat dat 5000 is. Ook sommen als $47 + 35$ zijn lastig op te lossen als je niet doordrongen bent van de waarde van de cijfers van de getallen. Er zijn kinderen die zeggen dat $3 + 4$ zeven is en $7 + 5$ twaalf en samen is dat dan volgens hen 19. Heel veel sommen oefenen, zal zeker helpen, maar ook een eenvoudig spel met drie verschillende dobbelstenen (één met honderdtallen, één met tientallen en één met eenheden) kan inzicht ontwikkelen in het positionele stelsel en kinderen ook nog eens uitnodigen na te gaan denken over die getallen op de getallenlijn. De vraag kan bijvoorbeeld zijn: Wie gooit het dichtst bij 750? Het eerste kind gooit 500 en 70 en 8 en zegt dat het 578 heeft gegooit. Het andere kind gooit 800 en 90 en 9. Dat is 899. Welk getal ligt dichterbij 750?

Spel kan dus op verschillende manieren in de rekenles worden ingezet:

- Om te signaleren. Een spelsituatie is natuurlijker dan een toets. Leerlingen kunnen dan beter laten zien wat ze al kunnen op rekegebied. Noteboom & Klep (2005) hebben signaleringsspelletjes ontworpen die de leerkracht inzicht geven over hoe het getalbegrip ontwikkeld is bij kleuters. Ook beschrijven ze welke interventies de leerkracht kan plegen om er voor te zorgen dat zichtbaar wordt wat een leerling wel en niet beheerst op het gebied van getalbegrip en ter stimulering van dat getalbegrip.
- Om te ondersteunen bij de begripsvorming. Sommige spellen werken spelonderwijs aan begripsvorming. Het spel Regenwormen bijvoorbeeld nodigt kinderen uit herhaald op te gaan tellen. Hiermee wordt het begrip voor wat vermenigvuldigen in essentie is ondersteund.
- Om de lesstof te automatiseren. Veel spellen kun je pas spelen als je voldoende rekenvaardig bent. Deze spellen lenen zich goed voor het automatiseren. De leerlingen kunnen al wel de sommen goed maken, maar nog niet snel. Het is een vorm van inoefenen die een deel van de rijtjessommen in het boek kan vervangen.

- Om te verrijken. In iedere klas zitten wel leerlingen die meer aankunnen dan wat de methode biedt. Deze leerlingen kunnen spellen aangeboden krijgen die een beroep doen op meer dan alleen die rekenvaardigheden die op dat moment aan bod komen. Ze kunnen door middel van spel worden uitgedaagd om hun rekenvaardigheid te verdiepen.

Rol van de leerkracht

Dit alles vraagt nogal wat van de leerkracht. Hij moet een gedegen kennis hebben van de leerlijnen die door alle jaargroepen heen lopen. Hij moet oog hebben voor verschillen tussen kinderen en daar adequaat op insprijngen. Hij moet weten hoe hij situaties kan creëren waarin die verschillen zichtbaar worden. Hij moet weten welke spellen hij met welk doel in kan zetten bij welke leerling. Hij moet in staat zijn de leerdoelen te vertalen naar een rijke instap. En hij moet nadenken over hoe de leerling gedacht heeft. Een complex geheel met als onderliggende vraag: Hoe geef je als leerkracht nu eigenlijk goed onderwijs?

De rekendiscussie

De laatste tijd wordt er in de media veel melding gemaakt van een rekendiscussie die in Nederland gevoerd wordt.

...Kinderen, maar ook volwassenen, spelen graag spelletjes. Met als doel de ander te slim af te zijn en te winnen, wordt er een grote betrokkenheid gecreëerd...

Aangevoerd door professor Van der Craats is er flinke kritiek op de manier waarop het rekenonderwijs nu wordt onderwezen, het realistisch rekenonderwijs. In onze visie is het een oneigenlijke discussie omdat het één het ander niet uitsluit. Van Zanten e.a. (2009) geeft aan dat de kritiekpunten soms - met name, maar niet uitsluitend, door de media - uitvergroot en contraproductief in beeld worden gebracht. Wat mee speelt in deze discussie is de maatschappelijke gedachte dat het rekenonderwijs vroeger beter was. Gravemeijer (2007) geeft aan dat de vernieuwingen in het rekenonderwijs juist zijn ingegeven vanuit de onvrede met het rekenonderwijs dat vooral mechanistisch van aard was. Van de leerlingen die perfect de tafels kenden, liet drie kwart het afweten als ze een verhaal moesten bedenken bij een som als $3 \times 6 = 18$. De helft kwam zelfs met een verhaaltje dat ging over optellen! Het realistisch rekenonderwijs is ingevoerd om er voor te zorgen dat getallen geen abstracte objecten zijn waarmee je bewerkingen uit kan voeren maar dat het



...Het plezier neemt toe met name doordat de leerling vanuit betekenis betrokken raakt bij het leren rekenen...

objecten zijn die we overal om ons heen zien en dat we vanuit het maatschappelijk nut begrijpen waarom we de bewerkingen uitvoeren.

Het is altijd prettig om een tegengeluid te horen, omdat het je scherpt in je gedachten en het houdt je kritisch ten aanzien van je eigen visie op wat goed rekenonderwijs is. We zijn het echter eens met Janson (2009) die stelt dat het tegengeluid vooral wordt opgeroepen door emoties en polariserend werkt. De ironie wil dat de meeste van deze critici net zo ideologisch zijn als wat zij anderen verwijten. Ook Hoogland (2008) wijst er op dat in de discussie vervormingen optreden, die leiden tot karikaturen die het reken-wiskundeonderwijs niet verder helpen. Het helpt de discussie niet veel verder en voegt niets toe aan kwaliteit van het Nederlandse rekenonderwijs.

Tot slot

Het voordeel van deze discussie is dat het rekenonderwijs weer op de kaart staat. Rekenen is meer dan alleen de sommen uit de methode maken en de gedachte dat de leerlingen aan de leerdoelen voldaan hebben, omdat

aan het eind van het schooljaar het boek uit is, is natuurlijk een illusie.

Het feit dat leerkrachten hun rekenonderwijs weer kritisch onder de loep nemen is alleen maar positief. Daarbij willen wij die leerkrachten vooral stimuleren om te 'experimenteren'. Ga eens op zoek naar een rijke instap die het doel van de les dient. Sla daarna eens wat opgaven uit de methode over omdat de leerlingen de doelen op een andere manier bereikt hebben. Zet ook eens een reken-spel in en ervaar wat dit met kinderen doet. Geef kinderen vooral de ruimte om zelf na te denken. Als je teambreed deelt wat de ervaringen zijn, kan er een eerste stap gezet worden in de richting van verandering binnen de school. Daar moet beleid op geformuleerd worden en soms is daar begeleiding bij nodig. Naast het opleiden van studenten, helpen wij daarom ook teams hun reken-/wiskundeonderwijs te verbeteren.

Onze ervaring is dat op het moment dat leerkrachten de methode enigszins los durven te laten en durven te vertrouwen op hun vakmanschap er iets gebeurt met de kinderen. Het plezier neemt toe met name doordat de leerling vanuit betekenis betrokken raakt bij het leren rekenen. De leerkracht ziet meer dan voorheen en kan adequater anticiperen en reageren. De kwaliteit van het onderwijs neemt toe. En dan komen we weer een stukje dichterbij onze doelstelling: Het beste rekenonderwijs voor ieder kind!

Literatuur:

- Boswinkel, N. Moerlands, F. (2002). Het topje van de ijsberg. *Geraadpleegd op 16 april 2009 op* <http://www.fi.uu.nl/speciaalrekenen/welcome.html>.
- Dolk, M. (2005). Aandacht voor 'big ideas' in de wiskunde. *Volgens Bartjens, 25(2), 4-6.*
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2003). Het leerlandschap. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 21(2), 29-37.*
- Gravemeijer, K. P. E. (2007). Reken-wiskundeonderwijs anno 2007. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26(4), 3-9.*
- Hoogland, K. (2008b). Nostalgische terugblik op de staartdeling. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9(4), 279-281*
- Janson, D. (2009). Het kanaal 118: De gelukkige rekenklas. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 28(1), 72-75.*
- Noteboom, A. & Klep, J. (2005). *Als kleuters leren tellen...* Enschede: SLO.
- Terlouw, B. & Schoeman, G. (2006). Werken aan begripvorming bij keersommen. *Volgens Bartjens, 25(5), 9-12.*
- Zanten, M. van, Keijzer, R., Gool, A. van, Barth, F. & Faarts, J., (2009). Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo versie 3. *Geraadpleegd op 16 mei 2009 op* http://www.kennisbasispabo.nl/attachments/0000/0061/KennisbasisRekenenWiskundeVersie3_090512.pdf.